Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Rémi Jaoui

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 9
Abgabe: 18.01.2022

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Eine Erweiterung bewerteter Körper $(K, \nu) \subset (L, \nu)$ ist *unmittelbar*, wenn $\nu(L^*) = \nu(K^*)$ und $L_\nu = K_\nu$.

(a) Falls $(K, \nu) \subset (L, \nu)$ unmittelbar ist, zeige, dass es für jedes $a \neq 0$ in L ein x aus K so gibt, dass $\nu(a - x) > \nu(a)$.

HINWEIS: $x = bc$ mit b aus K und $\nu(c) = 0$.

(b) Sei a ein Element aus L, mit $(K, \nu) \subset (L, \nu)$ unmittelbar. Zeige, dass die Menge

$$X(a) = \{\nu(a - x) : x \in K\} \subset \Gamma \cup \{\infty\}$$

genau dann ein maximales Element besitz, wenn a in K liegt.

(c) Mit Hilfe des Teiles (b), beschreibe alle unmittelbaren Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$.

HINWEIS: Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}$ ist unmittelbar.

Aufgabe 2 (11 Punkte)**.**
Sei $p \neq 2$ eine Primzahl.

(a) Zeige mit Hilfe des henselschen Lemmas, dass $1 + px^2$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}_p$ ist, wenn x in $\mathbb{Z}_p$ liegt. Des Weiteren ist $1 + px^2$ kein Quadrat in $\mathbb{Q}_p$ ist, falls x nicht in $\mathbb{Z}_p$ liegt.

(b) Zeige, dass jeder Körperautomorphismus σ von $\mathbb{Q}_p$ den Teilkörper $\mathbb{Q}$ punktweise fixiert.

(c) Zeige mit Hilfe der Teilaufgaben (a), dass jeder Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}_p$ die Menge $\mathbb{Z}_p$ in sich abbildet. Schließe daraus, dass jeder Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}_p$ stetig ist.

(d) Beschreibe nun alle Körperautomorphismen von $\mathbb{Q}_p$.

(e) Wie viele Körperautomorphismen von $\mathbb{R}$ gibt es?

HINWEIS: Zeige analog zu den obigen Aufgaben, dass jeder Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$ stetig ist. Hierfür, wann genau ist eine reelle Zahl positiv?

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**
Sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeige, dass ein Element α von $\mathbb{Q}_p^*$ genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}_p$ ist, wenn α eine m-te Wurzel in $\mathbb{Q}_p^*$ für jedes m besitzt, welches zu $p(p-1)$ teilerfremd ist.
HINWEIS: Kleiner Fermatscher Satz und Hensels Lemma.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.